ManifoldのBall Coveringについて (多様体の低余次元位置問題について)

数理解析研究所講究録
243巻 1975年 77-87

Manifold の Ball Covering について

北大 理　　小林 一章
相模工大　　津久井康之

compact manifod は有限個の ball で cover される。この最小数は明らかに topological invariant である。この極く自然な、一見荒っぽい、invariant がどのような性質を持ち、どのくらい有効なものなのか。この note ではこれらについての概観を試みることにし、証明の多くは省略する [Kobayashi-Tsukui]. 全て PL category で考える (Top. Dif. でもこの概念は有効ではあろうと思われる)。特に断らない限り、manifold は全て compact かつ connected PL manifold で、map 等も全て PL. とする。

Definition 1. M^n を n-manifold, $\mathcal{B}=\{B_i\}$ を M^n の中にある n-ball (closed ball) の finite set とする.

(1) $\cup B_i = M^n$ のとき $\mathcal{B}$ を M^n の weak ball covering と呼び,

(2) M^n の weak ball covering $\mathcal{B}=\{B_i\}$ が、$B_i, B_j \in \mathcal{B}$、$B_i \neq B_j$ について $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$: $(n-1)$-manifold (connected でなく

ても良い）であるときβをM^nの *ball covering* という。

$\beta(M^n) =$ min.$\{\#\beta$; βはM^nの weak ball covering$\}$,

$b(M^n) =$ min.$\{\#\beta$; βはM^nの *ball covering*$\}$

と定義する。（$\#\beta$ は set β の *element* の数を示す。）

manifold Mの（weak）ball covering βが $\#\beta = b(M)$ (*or* $\beta(M)$)

のときにβを *minimal* と呼ぶ。明らかに $\beta(M) \leqq b(M)$.

Lemma 1. $\beta = \{B_i\}$が manifold Mの（*weak*）*ball covering*

で，$\exists B_i, \exists B_j \in \beta$, $B_i \neq B_j$, $B_i \cap B_j = \phi$.

$\Longrightarrow \exists \beta'$: Mの（weak）ball coveringで $\#\beta' < \#\beta$.

Proof. βがMの ball coveringのときの証明をする。

Mが connected だから $\bigcup_{k\neq i,j} \partial B_k$ 上にB_iとB_jを結ぶ simple arc

γをとり、その regular neighborhood を$N = N(\gamma; M)$とする。$B_i \cup N \cup B_j$は ball だからB_i'とし、$B_k' = cl(B_k - B_i')$, $k \neq i, j$ とすれば，

$\beta' = \{B_k'\}_{k\neq j}$は$M$の ball coveringで $\#\beta' = \#\beta - 1$.

Corollary 2. βが manifold Mの minimalな（weak）ball

coveringならば、$\forall B_i, \forall B_j \in \beta$, $B_i \neq B_j$について $B_i \cap B_j \neq \phi$.

lemma 1.をくり返し用いると次が得られる。

Proposition 3. $b(M_1 \# M_2) \leqq$ max.$\{b(M_1), b(M_2)\}$.

次に dim M と $b(M)$との関係について考えてみよう。

$$M^n = h^0 \cup \bigcup h_{k_1}^{p_1} \cup \cdots \cup \bigcup h_{k_m}^{p_m}$$

とM^nの handle 分解を考え，（$1 \leqq p_1 < \cdots < p_m \leqq n$）.

lemma 1 の方法により同じ index の handle (n-ball) を 1 まとめにすることを inductive に行えば,

Proposition 4. M^n が上のような handle 分解をもてば, $b(M^n) \leqq n+1$, である。

$M^n \searrow K^k$ ならば M^n は index $\leqq k$ 以下の handle に分解されるから,

Corollary 5. (1) $M^n \searrow K^k \Rightarrow b(M^n) \leqq k+1$.

(2) $\partial M^n \neq \phi \Rightarrow b(M^n) \leqq n$

(3) $M^n - \mathring{\Delta}^n \searrow K^k$, M^n: closed $\Rightarrow b(M^n) \leqq k+2$.

従って $b(M)$ と $\dim M$ の関係としては一般に,

Theorem 6. $b(M^n) \leqq n+1$.

Example 7. $b(S^p \times S^q) = 3$, $(p, q \geqq 1)$

$S^p \times S^q$ は $0, p, q, p+q$ の index の 4 つの handle に分解され、かつ general position で p-handle と q-handle は交わらないから $b(S^p \times S^q) \leqq 3$. ところが $S^p \times S^q$ は closed で, $b(M)=2$ なら M は sphere 故 $b(S^p \times S^q) = 3$ を得る。

Contractible Manifolds について.

Lemma 8. M^n: n-manifold, $b(M^n) = 2$ とする. $\{B_1, B_2\}$ が M^n の ball covering ならば,

(1) $\pi_1(M^n)$: free group of rank $=$ rank $\tilde{H}_0(B_1 \cap B_2)$.

(2) $H_i(M^n) \cong H_{i-1}(B_1 \cap B_2) = H_{i-1}(\partial B_1 \cap \partial B_2)$, $2 \leqq i \leqq n$,

(3) $n \leqq 4$では, $H_2(M^n)$は free abelianで, その generator は 2-sphereで実現される。

Proof. p_iを B_iの centerとすれば $B_i \searrow p_i * (\partial B_1 \cap \partial B_2)$ 従って $M^n = B_1 \cup B_2 \searrow p_1 * (\partial B_1 \cap \partial B_2) * p_2 = \Sigma(\partial B_1 \cap \partial B_2) = \Sigma(B_1 \cap B_2)$ (suspension). (1)(2)はこの直接の結果.

$X \subset S^k$, $k \leqq 3$ なら $H_1(X)$: free abelian だから, (2)から $H_2(M^n) \cong H_1(\partial B_1 \cap \partial B_2)$, $n \leqq 4$, は free abelian. $H_1(\partial B_1 \cap \partial B_2)$ の generator は simple loop で表現されるから $H_2(M^n)$ の generator もその suspension として実現できる。

Theorem 9. M^n: homology n-sphere, $b(M^n) \leqq 3$ ならば $M^n \cong S^n$.

Proof. $b(M^n) = 3$ と仮定し, $\{B_1, B_2, B_3\}$ をM^n の minimal な ball covering とする. *lemma 8* と $\tilde{H}_*(B_1 \cup B_2) = 0$ から $\tilde{H}_*(\partial B_1 \cap \partial B_2) = 0$. Poincaré duality から $\partial(B_1 \cap B_2) = \partial(\partial B_1 \cap \partial B_2)$ は homology $(n-2)$-sphereである. 従って $n \leqq 4$ なら $\partial(B_1 \cap B_2) \cong S^{n-2} \subset \partial B_1^n$, $B_1 \cap B_2 \cong B^{n-1}$. 従って $B_1 \cup B_2 \cong B^n$ より $M^n \cong S^n$. $n \geqq 5$では, $\pi_1(B_1 \cup B_2) \cong \pi_1(\Sigma(B_1 \cap B_2)) \cong 0$ と Generalized Poincare Conjecture より $M^n \cong S^n$.

上の証明をみると次が成立している.

Corollary 10. M^n: acyclic manifold, $b(M^n) \leqq 2$, $n \leqq 4$
$\Longrightarrow$ $M^n \cong B^n$.

5次元以上ではこの事は正しくなく, $b(M^n)=2$ で(ball でない) contractible manifold M^n が存在する。構成の方法の細かい所は省略するが, $n \geq 4$ で contractible manifold U^n で $S^n \supset U^n$, $\pi_1(S^n - U^n) \neq 0$ なる example [Newman] [Neuzil] を用いる。

Proposition 11. [Glaser] $n \geqq 4$ について, (ballでない) contractible n-manifold M^n で $\beta(M^n)=2$ なるものが存在する。

この Glaser の例は $n \geqq 5$ では $\beta(M^n)=b(M^n)=2$ が確かめられるが $n=4$ について corollary 10と比べると;

Corollary 12. contractible 4-manifold M^4 が存在して $\beta(M^4)=2$ だが $b(M)=3$ である.

Glaserの Example M^4 は 2次元の spine P^2; $M^4 \searrow P^2$ を持つから corollary 5 から $b(M^4) \leqq 3$, corollary 10 より $b(M^4)=3$.
Glaser は $n \geq 5$ では割合カンタンにできた proposition 11の例を $n=4$ では非常に苦労して作っている。その理由は 10 にあり, しかし苦労の甲斐あって我々は 12 を得られた。

contractible manifold M^n, $n \geq 5$ については handle 分解

での cancelling の議論から $2 \leqq b(M^4) \leqq 3$ が分っている。

Proposition 13 [Wall] M^4: homotopy 4-sphere

$\Longrightarrow \exists k \geq 0, \quad b(M^4 \# k(S^2 \times S^2)) \leqq 3$.

これは Diff. case での Wall の $M^4 \# k(S^2 \times S^2) \overset{\text{Dif.}}{\cong} k(S^2 \times S^2)$

と example 7, proposition 3 から得られる.

一方 [Zeeman] は M^4: 1-connected, closed $\Rightarrow \beta(M^4) \leqq 3$.

を示している.

このように ball covering は4次元で興味ある問題をもつが、その前に3次元で得られる結果をみてみよう。

3次元で.

manifold の handle 分解と ball covering の関係については前に一般的に見てきたが, 3次元 manifold ではいっそう強い関係を handle分解 ― Heegaard Splitting ― との間に認められる。証明が細部ですこしメンドーになるので結果のみを記すことにする。 S^3から disjoint な有限個の balls の内部を取り去った manifold (with boundary) を punctured 3-sphere と呼ぶことにする。

Proposition 14. M^3 : 3-manifold, $\partial M^3 \neq \phi$.

M^3 は 1-handles (non orientableでも良い) 付の punctured

3-sphere である

$\Longleftrightarrow$ $b(M^3)=2$.

Theorem 15. M^3: closed 3-manifold.

$b(M^3)=3$

$\Longleftrightarrow$ $M^3 \cong k(S^1\times S^2)\# \varepsilon(S^1\times_\tau S^2)$ for some $k+\varepsilon \geqq 1$

$\varepsilon=0$ or 1 ($\varepsilon=1$: M^3: non orientable).

ここで $S^1\times_\tau S^2$ は twisted S^2 bundle over S^1 を示す.

Theorem 16. M^3: closed 3-manifold, $M^3 \not\cong S^3$, $\pi_1(M^3)=0$ or $H_2(M^3)=0$ (このとき theorem 15 から $b(M^3)=4$ である.).

$\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ を M^3 の ball covering とすると.

(1) $B_i\cap B_j=\partial B_i\cap\partial B_j$ は 有限個の 2-ball である, $i\neq j$.

(2) $(M; B_{i_1}\cup B_{i_2}, B_{i_3}\cup B_{i_4})$ は M^3 の Heegaard Splitting を与えている, $i_k\neq i_h$ if $k\neq h$.

4次元では.

予想 $B(n,m)$: M^n: closed n-manifold, $\beta(M^n)\leqq m \Rightarrow b(M^n)\leqq m$.

予想 $C(n)$: M_1^n, M_2^n : closed n-manifolds.

$$\Longrightarrow \quad b(M_1^n\# M_2^n)=\max\{b(M_1^n), b(M_2^n)\}$$

$B(n,m)$ は "closed" は本質的でそうでないと corollary 12 が反例である. 定義等から $B(n,2)$ $(n\neq 4)$, $B(n,n+1)$ 及び $C(2)$ が正しいことは明らか. theorem 15. から $C(3)$ も正しい。

Proposition 17. $P(4)$で4次元Poincaré予想，SCでSchoenflies予想を示すと，次の関係が得られる。

$$
\begin{tikzcd}
B(4,3) \arrow[dr, "①"] & & & \\
& P(4) \arrow[r, "③"] & SC \arrow[r, "④"] & B(4,2) \\
C(4) \arrow[ur, "②"] & & &
\end{tikzcd}
$$

③はよく知られているから①,②,④を示そう。

①：M^4をhomotopy 4-sphereとすると*proposition 13*の下の注意により$\beta(M^4)\leqq 3$. $B(4,3)$が正しいとするとtheorem 9より$M^4\cong S^4$.

②：同じくM^4をhomotopy 4-sphereとする．*proposition 13*より，ある$k\geqq 0$について$b(M^4\# k(S^2\times S^2))\leqq 3$．$C(4)$が正しいならば$b(M^4)\leqq 3$. 再びtheorem 9により$M^4\cong S^4$.

④ M^4: closed，$\beta(M^4)=2$とする．$\{B_1, B_2\}$がM^4のminimal weak ball coveringとすると，B_2のboundary collarにより$\partial B_1\subset \mathrm{Int}\,B_2$としてもよい．$SC$より$Cl(B_2-B_1)\cong B^4$. すると$M^4=B_1\cup Cl(B_2-B_1)$，$B_1\cap Cl(B_2-B_1)=\partial B_1=\partial\{Cl(B_2-B_1)\}$. 故に$M^4\cong S^4$で$b(M^4)=2$.（④の逆が正しいかどうかは知らない。）

もし，$B(4,2)$が正しくなければ*theorem 9*より，$\exists M^4$で$\beta(M^4)=2$ (*i.e. topological*にはS^4) だが$b(M^4)=5$ or 4.

その他の事など.

1. $1 \leqq b(M^n) \leqq n+1$ (theorem 6.) であるが, 実際に $1, \cdots, n+1$ なる $b(M^n)$ をとる manifold が存在するのか, というのは当然の問題となる. $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n個) について $b(T^n) = n+1$ が分っている. 従って T^n の ball covering $\beta = \{B_0, \cdots, B_n\}$ をとると $M_n = T^n - \mathring{B}_n$, $M_{n-1} = cl(M_n - B_{n-1}) = \bigcup_{i=0}^{n-2} B_i, \cdots\cdots$, $M_2 = B_0 \cup B_1$, について $b(M_r) = r$ となっている。

しかし closed manifold という制限をつけると, 多分, $b(S^{p_1} \times \cdots \times S^{p_m}) = m+1$ だろうと思われるが、今のところ証明できていない。

2. X^nを ANR とするとき, X^nの sub set (closed) で X^nで contract する C_i について $X^n = C_1 \cup \cdots \cup C_k$ と表わせるときこのような数 k の最小数 $cat(X^n)$ を X^nの Lusternik-Schnirelman category という. 「X^nの中で contract」を「C_i 自身が contractible」という条件で置き換えたとき $\underline{Cat}(X^n)$ と書き strong category と呼ぶ. $1 \leqq Cat(X^n) \leqq n+1$ が知られていて、theorem 6 との類似性に気づくが、ball は contractible 故 $cat(M^n) \leqq \beta(M^n) \leqq b(M^n)$ である. $cat(X^n)$ はまた代数的な homotopy, (co)homology theory との関係もある程度つけられ、 $b(S^{p_1} \times \cdots \times S^{p_m}) \geqq m+1$ 等もこれらの助けによって求められている.

3. n-manifold M^nについて，Mの combinatorial manifold としての triangulationでの n-simplexの最小数を $s(M)$，Mの handle 分解での handleの最小数を $h(M)$ とすると，

$$cat(M) \leqq Cat(M) \leqq \beta(M) \leqq b(M) \leqq h(M) \leqq S(M).$$

$h(M)$と $b(M)$との間にかなりのギャップがありそうなので場合によっては次のような強い ball covering が有効かもしれない。 $\beta=\{B_i\}$がM^nの ball coveringのとき更に条件をつけて， $B_i, B_j \in \beta$，$B_i \neq B_j$ のとき，

(i) $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$: connected $(n-1)$-manifold.

(ii) $\partial B_i \cap \partial B_j$: finite $(n-1)$-balls

(iii) $\partial B_i \cap \partial B_j \cong B^{n-1}$: $(n-1)$-ball.

4. ball covering はその定義の自然さから，多くの問題を ball covering の言葉で定式化することができる．その事によって問題の見通しが良くなるかどうかは今後に考えるべき事であろう。 closed n-manifolds と connected boundaryを持つ $(n+1)$-manifolds とを考えて，$b(M)$との関係である種の bordism を考えることも可能であろう。

REFERENCES

Glaser, L.C., Contractible Complexes in S^n, Proc. A.M.S. 16 (1965) 1357 ~ 1364.

————, Intersections of combinatorial balls and of Euclidean spaces, *Trans. A.M.S. 122 (1966) 311 ~ 12.*

Neuzil, J.P., Embedding the dunce hat in S^4, Topology 12 (1973) 411 ~ 415.

Newman, M.H.A., Boundaries of ULC sets in Euclidean space, Proc. N.A.S. 34 (1948) *193 ~ 196.*

Wall, C.T.C., On simply connected 4-manifolds, J. London Math. Soc. 39 (1964) *141 ~ 149.*

Zeeman, E.C., *The Poincaré Conjecture for $n \geqq 5$, Topology of 3-manifolds, Prentice Hall, (1962) 198 ~ 204.*

Kobayashi, K. and Tsukui, Y., *The Ball Coverings of manifolds, (to appear).*